南京航空航天大学
NANJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

有限元基础（FEM）
Finite Element Method

教师：高希光

南京航空航天大学

gaoxiguang@nuaa.edu.cn

通过本次课可以学到：

如何采用加权余量法求解微分方程。

微分方程与边界条件的表示。

微分方程可以表示为：

$$\mathbf{A}(\mathbf{u})=\begin{pmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix}=0,\text{在}\Omega\text{内。} \quad (2.1)$$

边界条件可以表示为：

$$\mathbf{B}(\mathbf{u})=\begin{pmatrix} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix}=0,\text{在}\Gamma\text{上。} \quad (2.2)$$

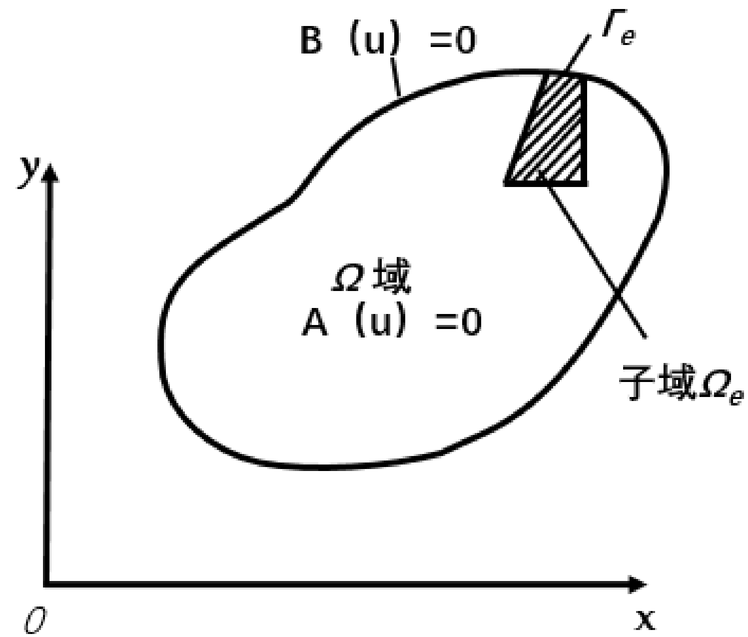


图1.1 域 Ω 和边界 Γ

其中A，B表示微分算子。微分方程数、边界条件数一般与未知函数u的个数相同。

微分方程的等效积分形式。

$$\int_{\Omega}\mathbf{v}^T\mathbf{A}(\mathbf{u})d\Omega+\int_{\Gamma}\bar{\mathbf{v}}^T\mathbf{B}(\mathbf{u})d\Gamma=0 \qquad (2.3)$$

其中v是任意函数向量，$\bar{\mathbf{v}}$ 是 $\mathbf{v}$ 在边界上的函数。

$$\mathbf{v}=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

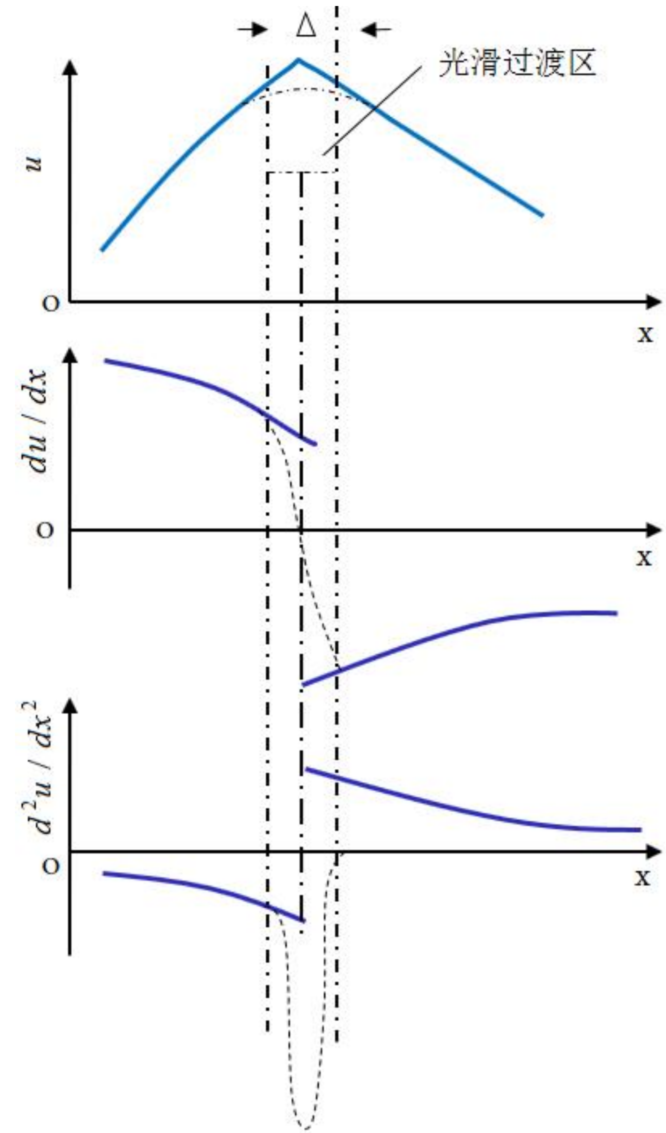
（1）如果u严格满足微分方程和边界条件，则对于任意v，上述积分方程必然成立；

（2）如果对于任意的v，u都能让上述积分方程成立，则u必然严格满足微分方程和边界条件。

等效积分形式对未知函数u连续性要求：

如果微分算子中出现最高次导数为n次，则要求u至少要有n-1连续性。

即：被积函数不能有无穷大。



等效积分的弱形式：

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}^T(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{D}(\mathbf{u})\, d\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}^T(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{u})\, d\Gamma = 0 \qquad (2.4)$$

其中C、D、E、F是微分算子。

目的：降低积分对被积函数连续性要求。

方法：对原积分形式使用分布积分、格林公式（二维）、高斯公式（三维），降低u的导数阶次，但会增加v的导数阶次。

余量的产生：近似解不能完全满足微分方程。

近似解：

$$u \approx \bar{u} = \sum_{i}^{n} N_i a_i = \mathbf{N} \cdot \mathbf{a} \qquad (2.5)$$

余量：

$$A(N \times a) = R \qquad (2.6)$$

$$B(N.a) = \bar{R} \qquad (2.7)$$

如何让近似解逼近精确解?

方法:令加权后的余量积分等于零。

改写后的等效积分形式:

$$\int_{\Omega} W_j^{\mathrm{T}}.\mathbf{A}(\mathrm{Na})\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_j^{\mathrm{T}}.\mathbf{B}(\mathrm{Na})\mathrm{d}\Gamma = 0(j = 1 \sim n) \quad (2.8)$$

写成余量的形式 :

$$\int_{\Omega} W_j^{\mathrm{T}}.\boldsymbol{R}\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \overline{W}_j^{\mathrm{T}}.\ \overline{\mathrm{R}}\mathrm{d}\Gamma = 0(j = 1 \sim n) \quad (2.9)$$

有n个待定系数a，就需要n个方程，权系数也有n个。

展开后的：

$$\int_{\Omega} W_1^{\mathrm{T}} \mathbf{A}(Na) d\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_1^{T} \mathbf{B}(\mathbf{N}a) \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}$$
$$\int_{\Omega} W_2^{T} \mathrm{A}(\mathbf{N}a) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_2^{\mathrm{T}} \mathbf{B}(\mathbf{N}a) \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}$$
$$\cdots\cdots$$
$$\int_{\Omega} W_n^{T} \mathrm{A}(\boldsymbol{N}\boldsymbol{a}) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \bar{W}_n^{\mathrm{T}} \mathbf{B}(\mathbf{N}a) \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}$$

弱积分形式：从积分形式变化而来

$$\int_{\Omega} \mathbf{C}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{W},)\mathbf{D}(\mathbf{N}\boldsymbol{a})\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\mathrm{r}}(\overline{\boldsymbol{W}},)\mathbf{F}(\mathbf{N}\boldsymbol{a})\mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

权函数的几种常用形式：

(1) 配点法：

$$\boldsymbol{W}_j = \delta\left(x - \boldsymbol{x}_j\right)$$

$\delta\left(x - \boldsymbol{x}_j\right)$ 则有如下性质：

当 $x \neq x_j$时， $w_j = 0$

但 $\int_{\Omega} \boldsymbol{W}_j \mathrm{d}\Omega = 1 \quad (j = 1, \cdots, n)$

相当于强迫余量在域内n个点等于0。

权函数的几种常用形式：

(2) 子域法：

在子域 j 内 $w_j = 1$

在子域 j 外 $w_j = 0$

本质：强迫在子域j内的余量积分为0.

Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4
Ω_5	… … …	… … … …	. . . .
			Ω_{16}

权函数的几种常用形式：

(3) 最小二乘法：

当近似解为 $\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n}N_i a_i$ 时

权函数 $\mathbf{W}_j=\dfrac{\partial}{\partial a_j}\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n}N_i a_i\right)$

本质上是让函数：$I\left(a_1,\cdots a_n\right)=\int_{\Omega}\mathbf{A}^T\left(\sum_{i=1}^{n}N_i a_i\right)\cdot\mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n}N_i a_i\right)d\Omega$ 取最小值。

即要求：$\dfrac{\partial I\left(a_1,\cdots a_n\right)}{\partial a_i}=0$

权函数的几种常用形式：

(4) 力矩法：

以一维问题为例，微分方程

$$A(u)=0$$

近似解 $\tilde{u}$ 满足边界条件。

令

$$W_j=1,x,x^2$$

则

$$\int_\Omega A(\tilde{u})dx=0,\quad \int_\Omega xA(\tilde{u})dx=0,\quad \int_\Omega x^2A(\tilde{u})dx=0,\cdots$$

权函数的几种常用形式：

(5) 伽辽金法：

采用近似解的试探函数序列作为权函数。

在求解域内：$W_j = N_j$

在边界上：$\bar{W}_j = -W_j = -N_j$

则近似积分形式可以写成：

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_j^T \mathbf{A}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i a_i\right) d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{N}_j^T \mathbf{B}\left(\sum_{i=1}^{n} \mathbf{N}_i a_i\right) d\Gamma = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2.10)$$

权函数的几种常用形式：

(5) 伽辽金法：

采用近似解变分可以将上述n个方程写成统一的表达式：

$$\int_{\Omega} \delta \tilde{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{A}(\tilde{\boldsymbol{u}}) \mathrm{d}\Omega - \int_{\Gamma} \delta \tilde{\boldsymbol{u}}^{\mathrm{T}} \mathbf{B}(\bar{\boldsymbol{u}}) \mathrm{d}\Gamma = 0 \qquad (2.11)$$

其中近似位移：

$$\delta \tilde{u} = N_1 \delta a_1 + N_2 \delta a_2 + \cdots + N_n \delta a_n \qquad (2.12)$$

弱形式：$\int_{\Omega} \mathbf{C}^{\mathrm{T}} (\delta \bar{\boldsymbol{u}}) \mathbf{D}(\tilde{\boldsymbol{u}}) \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma} \mathbf{E}^{\mathrm{T}} (\delta \bar{\boldsymbol{u}}) \mathbf{F}(\tilde{\boldsymbol{u}}) \mathrm{d}\Gamma = \mathbf{0}$ (2.13)

算例:

采用五种方法求解二阶常微分方程

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0 \qquad (0\le x\le 1)$$

边界条件：

$$\begin{cases} x=0, u=0 \\ x=1, u=0 \end{cases}$$

近似解：

$$u=x(1-x)(a_1+a_2x+\cdots)$$

2.13加权余量法-例子

$$\frac{d^2u}{dx^2}+u+x=0 \quad \begin{cases} 当x=0时， & u=0 \\ 当x=1时， & u=0 \end{cases}$$

近似解：

$$u=x(1-x)(a_1+a_2x+\cdots)$$

要求：1.满足强制边界条件；2. 方程中出现最高导数为2，需要C1连续。

取 $\tilde{u}_1=a_1x(1-x)$ 则 $R_1(x)=x+a_1(-2+x-x^2)$

取 $\tilde{u}_2=x(1-x)(a_1+a_2x)$ 则 $R_2(x)=x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)$

2.13加权余量法-例子

配点法

一项近似解：取1/2 作为配点

$$R_1(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - \frac{7}{4}a_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = \frac{2}{7}$$

两项近似解： 取1/3 ，2/3 作为配点

$$\begin{aligned} R_2(\frac{1}{3}) &= \frac{1}{3} - \frac{9}{16}a_1 + \frac{2}{27}a_2 \\ R_2(\frac{2}{3}) &= \frac{2}{3} - \frac{9}{16}a_1 - \frac{50}{27}a_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0.1948, a_2 = 0.1731$$

2.13加权余量法-例子

子域法

一项近似解：子域取全域

$$\int_0^1 R_1(x)dx = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2)]dx = \frac{1}{2} - \frac{11}{6}a_1 = 0 \Rightarrow a_1 = \frac{3}{11}$$

两项近似解：分别取 $v_1 = 1$，当$0 \le x \le \frac{1}{2}$时（Ω_1）

$$\int_0^{\frac{1}{2}} R_2(x)dx = \frac{1}{8} - \frac{11}{12}a_1 + \frac{53}{192}a_2 = 0$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^1 R_2(x)dx = \frac{3}{8} - \frac{11}{12}a_1 + \frac{229}{192}a_2 = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0.1876, a_2 = 0.1702$$

2.13加权余量法-例子

最小二乘法

将余量的二次方 R^2 在域 Ω 中积分

$$I = \int_{\Omega} R^2 d\Omega$$

设近似解的待定系数，使得余量在全域的积分达到极小值，因而：

$$\frac{\partial I}{\partial a_i} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

得：

$$\int_{\Omega} R \frac{\partial R}{\partial a_i} d\Omega = 0$$

2.13加权余量法-例子

最小二乘法

一次近似：

$$R_1(x) = x + a_1(-2 + x - x^2) \qquad \frac{\partial R}{\partial a_i} = -2 + x - x^2$$

代入积分方程 $\int_\Omega R \frac{\partial R}{\partial a_i} d\Omega = 0$ 得：

$$\int_0^1 R_1 \frac{\partial R_1}{\partial a_1} dx = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2)](-2 + x - x^2) dx = 0$$

得： $a_1 = 0.2723$

2.13加权余量法-例子

最小二乘法

二次近似： $R_2(x)=x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)$

$$v_2=\frac{\partial R_2}{\partial a_2}=2-6x+x^2-x^3$$

$$v_1=\frac{\partial R_2}{\partial a_1}=-2x+x-x^2$$

代入积分方程：

$$\int_0^1 R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_1}dx=\int_0^1[x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)](-2+x-x^2)dx=0$$

$$\int_0^1 R_2\frac{\partial R_2}{\partial a_2}dx=\int_0^1[x+a_1(-2+x-x^2)+a_2(2-6x+x^2-x^3)](2-6x+x^2-x^3)dx=0$$

得： $a_1=0.1875, a_2=0.1695$

2.13加权余量法-例子

力矩法

一次近似：$\int_0^1 1\cdot R_1(x)dx = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2)]dx = 0$

得：$a_1 = \dfrac{3}{11}$

二次近似取：$v_1 = 1, v_2 = x$

得：

$$\int_0^1 1\cdot R_1(x)dx = \int_0^1 [x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)]dx = 0$$

$$\int_0^1 x\cdot R_1(x)dx = \int_0^1 x\cdot[x + a_1(-2 + x - x^2) + a_2(2 - 6x + x^2 - x^3)]dx = 0$$

得：$a_1 = 0.1880, a_2 = 0.1695$

2.13加权余量法-例子

伽辽金法：

一次近似：$\tilde{u}_1 = N_1 a_1 = a_1 x(1-x)$ 得：$\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{N}_1 = \boldsymbol{x}(1-\boldsymbol{x})$

积分方程：$\int_0^1 x(1-x)\cdot R_1(x)dx = \int_0^1 x(1-x)[x + a_1(-2 + x - x^2)]dx = 0$

得：$a_1 = \frac{5}{18}$

南京航空航天大学 NANJING UNIVERSITY OF AERONAUTICS AND ASTRONAUTICS

2.13加权余量法-例子

伽辽金法：

二次近似： $\tilde{u}_2 = N_1 a_1 + N_2 a_2 = a_1 x(1-x) + a_2 x^2 (1-x)$

得：$v_1 = N_1 = x(1-x), v_2 = N_2 = x^2(1-x)$

积分方程：

$$\int_0^1 x(1-x)\cdot R_1(x)dx = \int_0^1 x(1-x)[x + a_1(-2+x-x^2) + a_2(2-6x+x^2-x^3)]dx = 0$$

$$\int_0^1 x^2(1-x)\cdot R_1(x)dx = \int_0^1 x^2(1-x)\cdot[x + a_1(-2+x-x^2) + a_2(2-6x+x^2-x^3)]dx = 0$$

解得：$a_1 = 0.1924, a_2 = 0.1707$

表2. 1 不同加权余量方法的近似解与精确解结果比较

精确解		$u=\dfrac{\sin x}{\sin 1}-x$		$x=0.25$ $u=0.04401$		$x=0.75$ $u=0.06006$	
近似解		值	误差/%	值	误差/%	值	误差/%
一项近似解	1.配点:	0.05357	21.7	0.07143	2.4	0.05357	-10.8
	2.子域:	0.05114	16.2	0.06818	-2.3	0.05114	-14.9
	3.最小二乘:	0.05106	16.0	0.06808	-2.4	0.05106	-15.0
	4.力矩:	0.05114	16.2	0.06818	-2.3	0.05114	-14.9
	5.伽辽金:	0.05208	18.3	0.06944	-0.4	0.05208	-13.3
两项近似解	1.配点:	0.04464	1.4	0.07034	0.8	0.06087	1.3
	2.子域:	0.04315	-2.0	0.06818	-2.3	0.05911	-1.6
	3.最小二乘:	0.04310	-2.1	0.06806	-2.4	0.05899	-1.8
	4.力矩:	0.04320	-1.8	0.06819	-2.2	0.05909	-1.6
	5.伽辽金:	0.04408	0.2	0.06944	-0.4	0.06008	0.03

2.11 等效积分形式-例子

原方程和边界条件: $\mathbf{A}(\mathbf{u})=\begin{pmatrix} A_1(\mathbf{u}) \\ A_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix}=0, \mathbf{B}(\mathbf{u})=\begin{pmatrix} B_1(\mathbf{u}) \\ B_2(\mathbf{u}) \\ \vdots \end{pmatrix}=0$

等效积分方程: $\int_\Omega \mathbf{v}^T \mathbf{A}(\mathbf{u})\,d\Omega+\int_\Gamma \overline{\mathbf{v}}^T \mathbf{B}(\mathbf{u})\,d\Gamma=0$

对任意的v都成立。

2.11 等效积分形式-例子

以热传导方程为例

原方程和边界条件:

$$A(\phi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q=0, B(\phi)=\begin{cases}\phi-\bar{\phi}=0 & (\text{在}\Gamma_{\phi}\text{上})\\ k\dfrac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}-\bar{q}=0 & (\text{在}\Gamma_{q}\text{上})\end{cases}$$

等效积分方程：

$$\int_{\Omega} v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)+Q\right]d\Omega+\int_{\Gamma_{\phi}}\bar{v}\left[\phi-\bar{\phi}\right]d\Gamma+\int_{\Gamma q}\bar{v}\left[k\frac{\partial \phi}{\partial \mathbf{n}}-\bar{q}\right]d\Gamma\equiv 0$$

对任意的v都成立。

2.12 弱积分形式-例子

以热传导方程为例

等效积分方程：

$$\int_{\Omega} v\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)+Q\right]d\Omega+\int_{\Gamma_\phi}\bar{v}\left[\phi-\bar{\phi}\right]d\Gamma+\int_{\Gamma q}\bar{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}}-\bar{q}\right]d\Gamma\equiv 0$$

目标：降低Φ的导数阶次。

方法：分部积分、格林公式

$$\int_{\Omega} v\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdy=\int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdy-\int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy$$

2.12 弱积分形式-例子

以热传导方程为例

$$\int_{\Omega} v\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dxdy = \int_{\Omega}\frac{\partial}{\partial x}\left(v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dxdy - \int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy$$

格林公式

$$\int_{\Omega}\frac{\partial Q}{\partial x}dxdy = \oint_{\Gamma} Qdy$$

$$\int_{\Omega}\frac{\partial P}{\partial y}dxdy = -\oint_{\Gamma} Pdx$$

$$\int_{\Omega} v\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)dxdy = \oint_{\Gamma} v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x d\Gamma - \int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}dxdy$$

$$\int_{\Omega} v\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy = \oint_{\Gamma} v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial y}n_y d\Gamma - \int_{\Omega}\frac{\partial v}{\partial y}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial y}dxdy$$

定义边界 的外法线方向为，那么

$$dx = -n_y d\Gamma, dy = n_x d\Gamma$$

2.12 弱积分形式-例子

等效积分方程：

要求Φ满足强制边界条件，所以此项等于0

$$\int_\Omega v\left[\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)}+\underline{Q}\right]d\Omega+\boxed{\int_{\Gamma_\phi}\bar{v}\left[\phi-\bar{\phi}\right]d\Gamma}+\underline{\int_{\Gamma q}\bar{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial \mathbf{n}}-\bar{q}\right]d\Gamma}\equiv 0$$

$$\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)dxdy=\oint_\Gamma v\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x d\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy$$

$$\int_\Omega v\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)dxdy=\oint_\Gamma v\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y d\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial y}\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial y}dxdy$$

$$\underline{\oint_\Gamma v\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial x}n_x d\Gamma+\oint_\Gamma v\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial y}n_y d\Gamma-\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial x}dxdy-\int_\Omega\frac{\partial v}{\partial y}\cdot k\frac{\partial\phi}{\partial y}dxdy}+\underline{\int_\Omega vQd\Omega}+\underline{\int_{\Gamma q}\bar{v}\left[k\frac{\partial\phi}{\partial n}-\bar{q}\right]d\Gamma}=0$$

2.12 弱积分形式-例子

等效积分方程：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy-\int_\Omega vQd\Omega-\oint_\Gamma v\cdot k\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial \phi}{\partial y}n_y\right)d\Gamma-\int_{\Gamma q}\bar{v}\left[k\frac{\partial \phi}{\partial n}-\bar{q}\right]d\Gamma=0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}n_x+\frac{\partial \phi}{\partial y}n_y=\frac{\partial \phi}{\partial n}$$

$$-\oint_\Gamma v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial n}d\Gamma$$

$$\bar{v}=-v$$

$$\int_{\Gamma q}v\left[k\frac{\partial \phi}{\partial n}-\bar{q}\right]d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma\phi}v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial n}d\Gamma-\int_{\Gamma q}v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial n}d\Gamma \qquad +\int_{\Gamma q}vk\frac{\partial \phi}{\partial n}d\Gamma-\int_{\Gamma q}v\bar{q}d\Gamma$$

合并=0

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy-\int_\Omega vQd\Omega$$

$$-\oint_{\Gamma_\phi}v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial n}d\Gamma$$

$$-\int_{\Gamma q}v\bar{q}d\Gamma=0$$

弱形式：

$$\int_\Omega\left(\frac{\partial v}{\partial x}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)dxdy-\int_\Omega vQd\Omega-\oint_{\Gamma_\phi}v\cdot k\frac{\partial \phi}{\partial n}d\Gamma-\int_{\Gamma q}v\bar{q}d\Gamma=0$$